III. *Specimina quædam illustria Doctrinæ* Fluxionum *sive exempla quibus Methodi istius Usus & præstantia in solvendis Problematis Geometricis elucidatur, ex Epistola Peritissimi Mathematici D.* Ab. de Moivre *desumpta.*

HAbes insuper Methodum quam pollicitus eram de Figurarum Curvilinearum Quadraturis; de Solidorum à rotatione plani genitorum eorumque Superficierum dimensione; de rectificatione Curvarum, deque Centri Gravitatis Calculo. Ea à multis doctissimis viris tractata fuisse scio ——— non ideo hoc meum qualecunque tentamen tibi displiciturum existimavi, si modo mihi contigerit ad hæc viam expeditiorem quam quæ vulgo nota est reperisse.

Verum priusquam ulterius progrediar hoc te monitum velim me usurpare illa quæ demonstravit Clarissimus *Newtonus* in *pag.* 251, 252 & 253 *Princ. Phil.* circa momentanea incrementa vel decrementa quantitatum quæ fluxu continuo crescunt vel decrescunt, præsertim quod dignitatis cujuscunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum sit $\frac{n}{m} a A^{\frac{n}{m}-1}$.

Porro data fluxione $\frac{n}{m} a A^{\frac{n}{m}-1}$ vicissim reperiri potest quantitas fluens $A^{\frac{n}{m}}$, 1° tollendo a de fluxione, 2° fluxionis Indicem unitate augendo, 3° denique fluxionem dividendo per Indicem sic unitate auctum.

Curvæ abscissa designabitur deinceps per x, ejus fluxio per $\dot{x}$, ordinatim applicata per y, ejusque fluxio per $\dot{y}$

His positis ut ad quadraturas deveniamus, 1° assumatur valor ordinatim applicatæ ope æquationis naturam Curvæ exprimentis. 2° Multiplicetur hic valor per fluxionem abscissæ; Rectangulum hinc ortum erit fluxio areæ. 3° Datâ fluxione Areæ reperiatur quantitas fluens, habebitur Area quæsita.

Proponatur æquatio $x^{m} = y^{n}$ cujusvis Paraboloidos naturam exprimens, valor ordinatim applicatæ y est $x^{\frac{m}{n}}$ qui si multipli-

multiplicetur per x, rectangulum $x^{\frac{m}{n}} \dot{x}$ erit fluxio Areæ, pro indeque Area quæsita erit $\frac{n}{m+n} x^{\frac{m}{n}+1}$, seu (posito y pro $x^{\frac{m}{n}}$) $\frac{n}{m+n} x y$.

Rursum proponatur Curva cujus æquatio sit, $x^4 + aaxx = yy$ (illa scilicet quæ inter exempla Cl. *Craigi* extat prima) assumpto $x\sqrt{xx+aa} = y$, fluxio Areæ erit $x\dot{x}\sqrt{xx+aa}$; Cum autem sub Radicalitate involvatur, supponatur $\sqrt{xx+aa} = z$, hinc $xx+aa = z^2$, ideoque $x\dot{x} = z\dot{z}$; positisque $z\dot{z}$ & z pro $x\dot{x}$ & $\sqrt{xx+aa}$, fluxio à Surdis liberata erit $z^2\dot{z}$, quam si ad originem suam $\frac{1}{3}z^3$ revocaverimus, repositoque $\sqrt{xx+aa}$ pro z, habebitur $\frac{1}{3}\overline{xx+aa}\sqrt{xx+aa}$ pro Area quæsita.

Sed quo magis constet quam facili negotio conficiantur hujusmodi quadraturæ, unum amplius exemplum proferre visum est; æquatio Curvæ talis sit $\frac{x^2}{x+a} = y^2$, igitur $y = \frac{x}{\sqrt{x+a}}$ ideoque $\frac{x\dot{x}}{\sqrt{x+a}}$ est fluxio Areæ: supponatur $\sqrt{x+a} = z$, hinc $x = zz - a$, & $\dot{x} = 2z\dot{z}$, Itaque $\frac{x\dot{x}}{\sqrt{x+a}} = 2z^2\dot{z} - 2a\dot{z}$, ac proinde $\frac{2}{3}z^3 - 2az$ seu $\frac{2}{3}\overline{x - \frac{4}{3}a}\sqrt{x+a}$ erit Area quæsita.

Verum sæpe accidit ut quædam Curvæ, quales Circulus & Hyperbola, ejus naturæ sint, ut frustra tentaveris earum fluxiones Surdis immunes facere; tunc valore ordinatæ in seriem infinitam conjecto, singulisque hujus seriei terminis per fluxionem abscissæ, ut supra, multiplicatis, reperiatur singulorum terminorum quantitas fluens, orietur nova series quæ quadraturam Curvæ exhibebit.

Methodus hæc eadem facilitate ad dimensionem Solidorum à plani circumvolutione genitorum accomodatur, nempe assumendo pro eorum fluxione productum ex fluxione abscissæ per circulum basis; Ratio quadrati ad circulum sibi inscriptum vocetur $\frac{n}{1}$, æquatio circulo competens est $yy = dx - xx$, igitur $4\,\frac{\overline{dx\dot{x}-x^2\dot{x}}}{n}$ est fluxio portionis Sphæræ, igitur $4\,\frac{\overline{\frac{1}{2}dxx-\frac{1}{3}x^3}}{n}$ est portio ipsa, huic circumscriptus cylindrus est $4\,\frac{\overline{dxx-x^3}}{n}$, ideoque ratio portionis Sphæræ ad circumscriptum cylindrum est ut $\frac{1}{2}d-\frac{1}{3}x$ ad $d-x$.

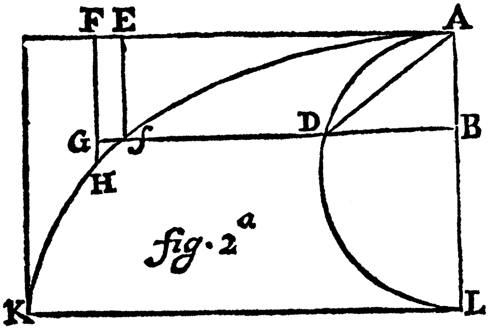
Rectificatio curvarum obtinebitur, si Hypothenusa Trianguli rectanguli cujus latera sunt fluxiones abscissæ & ordinatæ, tanquam Curvæ fluxio consideretur, sed curandum est ut, in expressione istius hypothenusæ, alterutra fluxionum solummodo supersit, ac una tantum indeterminatarum, illa scilicet cujus fluxio retinetur. Res Exemplis clarior fiet.

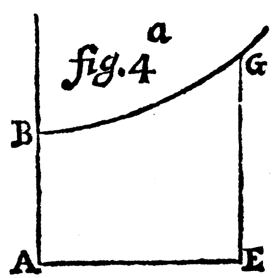
Ex dato sinu recto CB arcum AC invenire, positis $AB=x$, $CB=y$, $OA=r$; sit CE fluxio abscissæ, ED fluxio ordinatim applicatæ, CD fluxio arcus CA; Ex Circuli proprietate $2rx-xx=yy$, unde $2r\dot{x}-2x\dot{x}=2y\dot{y}$, ideoque

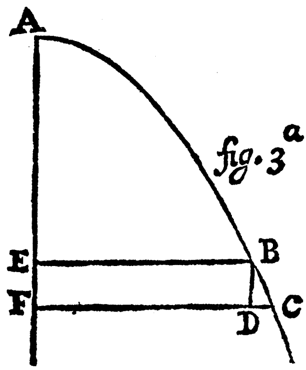
Fig. prima. $\dot{x}=\frac{y\dot{y}}{r-x}$, sed $CDq=\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=\dot{y}\dot{y}+\frac{y^2\dot{y}\dot{y}}{rr-2rx+xx}$ $=\dot{y}\dot{y}+\frac{y^2\dot{y}\dot{y}}{rr-yy}=\frac{rr\dot{y}\dot{y}}{rr-yy}$ igitur $CD=\frac{r\dot{y}}{\sqrt{rr-yy}}$, sed $\frac{r\dot{y}}{\sqrt{rr-yy}}$ factum est ex $\frac{1}{\sqrt{rr-yy}}$ seu $\overline{rr-yy}|^{-\frac{1}{2}}$ in $r\dot{y}$ proindeque si $\overline{rr-yy}|^{-\frac{1}{2}}$ conjiciatur in seriem infinitam cujus singula membra per $r\dot{y}$ multiplicentur, & ex unoquoque producto ad quantitatem fluentem fiat retrogressus, habebitur longitudo arcus AC.

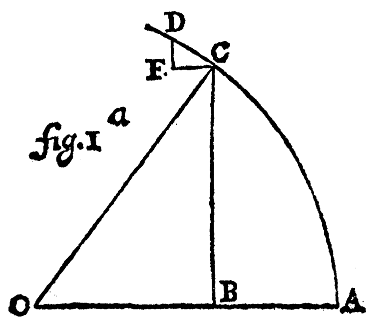
Non absimili modo ex dato sinu verso reperietur idem arcus; Resumatur æquatio supra inventa $2r\dot{x}-2x\dot{x}=2y\dot{y}$, fit $\dot{y}=\frac{r\dot{x}-x\dot{x}}{2y}$, sed $CDq=\dot{x}\dot{x}+\dot{y}\dot{y}=$ $\dot{x}\dot{x}+\frac{rr\dot{x}\dot{x}-2rx\dot{x}\dot{x}+x^2\dot{x}\dot{x}}{yy}=\dot{x}\dot{x}+\frac{rr\dot{x}\dot{x}-2rx\dot{x}\dot{x}+x^2\dot{x}\dot{x}}{2rx-xx}$ seu (omnibus sub eodem denominatore reductis, expunctisque iis quæ sub diversis signis continentur) $=\frac{rr\dot{x}\dot{x}}{2rx-xx}$ unde $CD=\frac{r\dot{x}}{\sqrt{2rx-xx}}$, ideoque longitudo arcus AC per ea quæ jam dicta sunt facile obtinebitur.

Fluxio









See Page 54.

Fluxio curvæ facilius interdum reperitur per comparationem inter Triangula similia C E D, C B O, institui enim potest hæc proportio, C B, C O : : C E, C D, hoc est, pro circulo, $\sqrt{2rx-xx}$, $r :: \dot{x}$, $\frac{r\dot{x}}{\sqrt{2rx-xx}}$.

Curva Cycloidis eadem opera cognosci poterit. Sit A L K semicyclois cujus circulus genitor ADL. Assumpto in diametro A L quovis puncto B, ducatur B j parallela basi L K, peripheriæ circuli in puncto D occurrens; compleatur rectangulum A E j B ducaturque F H rectæ E j parallela, eidemque infinite vicina, B j productam secans in G, curvamque A K in H; ponatur A L $= d$, A B $=$ E j $= x$, G H $= \dot{x}$; Notum est rectam B G esse ubique aggregatum arcus A D & sinus recti B D, hinc manifestum est fluxionem j G esse aggregatum fluxionum arcus A D & sinus recti B D. Porro fluxio arcus A D reperta est $= \frac{\frac{1}{2}d\dot{x}}{\sqrt{dx-xx}}$, fluxio autem sinus recti B D reperietur $= \frac{d\dot{x}-2x\dot{x}}{2\sqrt{dx-xx}}$, igitur j G $= \frac{d\dot{x}-x\dot{x}}{\sqrt{dx-xx}}$, ideoque Fig. secunda.

j H $q =$ j G $q +$ G H $q = \frac{dd\dot{x}\dot{x}-dx\dot{x}\dot{x}}{dx-xx}$, Quamobrem j H $=$ $\frac{\dot{x}\sqrt{dd-dx}}{\sqrt{dx-xx}} = \frac{\dot{x}\sqrt{d}}{\sqrt{x}} = d^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\dot{x}$, proindeque A j $= 2\,d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ $= 2\sqrt{dx} = 2$ A D.

Hæc conclusio minimo cum labore deduci potest ex nota proprietate Tangentis, cum enim illius portiuncula j H semper sit parallela chordæ A D, fit ut Triangula j G H, A B D sint similia, unde A B, A D : : G H, j H, hoc est x, $\sqrt{dx} :: \dot{x}$, $\frac{\dot{x}\sqrt{dx}}{x}$, igitur j H $= \frac{\dot{x}\sqrt{dx}}{x} = d^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\dot{x}$.

Sed nihil vetat quominus adhibito fluxionis j H auxilio, ipsam Cycloidis aream investigemus. Fluxio Areæ A E j est rectangulum E j G $= \frac{dx\dot{x}-x^2\dot{x}}{\sqrt{dx-xx}} = \dot{x}\sqrt{dx-xx}$, sed fluxio portionis A B D non alia est ab illa: Itaque Area A E j, correspondensque circuli portio A B D semper sunt æquales.

Esto A B curva Parabolæ cujus Axis A F, parameter a; Fig. ter ponatur A E $= x$, E B $= y$, A B z, B D $= \dot{x}$, D C $= \dot{y}$, B C $= \dot{z}$, assumptâ æquatione Parabolæ naturam constituente,

 vide-

videlicet $a x = y y$, fit $a \dot{x} = 2 y \dot{y}$, unde $\dot{x} = \frac{2 y \dot{y}}{a}$, sed $BCq = BDq + CDq$, hoc est $\dot{z}\dot{z} = \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} = \frac{4 y^2 \dot{y}\dot{y}}{a a} + \dot{y}\dot{y} = \frac{4 y^2 \dot{y}\dot{y} + a a \dot{y}\dot{y}}{a a}$, ideoq; $\dot{z} = \dot{y} \frac{\sqrt{4 y^2 + a a}}{a}$ vel, quod idem est, $\dot{z} = \dot{y} \frac{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4} a a}}{\frac{1}{2} a}$: si ergo $\dot{y} \frac{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4} a a}}{\frac{1}{2} a}$ in seriem infinitam tranformetur, Curva AB haud difficulter innotescet.

Insuper, statim apparet, dato Hyperbolico spatio curvam hanc dari, & viciffim. Nam $\frac{1}{2} a \dot{z} = \dot{y} \sqrt{y^2 + \frac{1}{4} a a}$, ac pro-
Fig. quarta inde $\frac{1}{2} a z$ = spatio cujus fluxio est $\dot{y} \sqrt{y^2 + \frac{1}{4} a a}$, sed hujusmodi spatium nihil aliud est quam hyperbola æquilatera exterior A B E G, cujus semiaxis $AB = \frac{1}{2} a$, abscissa $AE = y$, ordinatim applicata $EG = x$.

Ad dimetiendam superficiem conversione curvæ circa suum Axem descriptam, assumi debet pro ejus fluxione Cylindrica superficies cujus altitudo est ipsa curvæ fluxio, cujusque distantia ab Axe est ordinatim applicata huic fluxioni conveniens.

Sit Ex. gr. A C circuli arcus qui circa Axem AD revolvendo superficiem Sphæricam generet, quamque dimetiri statua-
Fig. prima. mus; D C arcus fluxio jam reperta est $\frac{r \dot{x}}{\sqrt{2 r x - x x}}$ hanc si multiplicemus per circumferentiam ad radium B C pertinentem, hoc est per $\frac{c}{r} \sqrt{2 r x - x x}$ (posita ratione circumferentiæ ad radium $= \frac{c}{r}$) habebimus fluxionem superficiei Sphæricæ $= c \dot{x}$; adeoque superficies ipsa est $c x$.

Ad centra gravitatis quod attinet, repertâ superficiei solidive fluxione, hacque ducta in suam à Vertice distantiam, ad quantitatem fluentem recurrendum est: qua divisa per Superficiem ipsam Solidumve ipsum, prodibit distantia centri Gravitatis à Vertice.

Inveniendum

Inveniendum fit centrum gravitatis omnium Paraboloidum horum fluxio fic generaliter exprimitur $x^{\frac{m}{n}}\dot{x}$, hanc multiplica per x, fit $x^{\frac{m}{n}+1}\dot{x}$ cujus quantitatem fluentem $\frac{n}{m+2n}x^{\frac{m}{n}+2}$ divide per Paraboloidos aream puta $\frac{n}{m+n}x^{\frac{m}{n}+1}$; prodibit $\frac{m+n}{m+2n}x$, diftantia centri gravitatis à Vertice.

Centrum gravitatis in portione Sphæræ eodem modo colligitur, namque illius fluxione $4\,\frac{\overline{dx\dot{x}-x^2\dot{x}}}{n}$ in x ductâ fit $4\,\frac{\overline{dx^2\dot{x}-x^3\dot{x}}}{n}$, cujus quantitas fluens $4\,\frac{\overline{\frac{1}{3}dx^3-\frac{1}{4}x^4}}{n}$ per Portionis foliditatem divifa, puta $4\,\frac{\overline{\frac{1}{2}dxx-\frac{1}{3}x^3}}{n}$ exhibet $\frac{\frac{1}{3}d-\frac{1}{4}x}{\frac{1}{2}d-\frac{1}{3}x}x$, feu $\frac{4d-3x}{6d-4x}x$ diftantiam centri gravitatis à Vertice.

Non ftatutum habui omnes difficultates quibus calculus ifte obnoxius eft hic profequi, mihi fufficiat ad majora viam aperuiffe, Tu interim, Vir Clariffime, Vale & me ama.